rijksuniversiteit groningen

Een Galileïsche dans

1 : 2 : 4 resonante periodieke bewegingen en hun libraties

van Jupiter en zijn Galileïsche manen

Henk Broer
Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen

Inhoud

i. Galileo (1610): *Sidereus Nuncius*,
Newton (1687): *Principia Mathematicæ* en
Laplace (1799): *Traité de Mécanique Céleste*

ii. 1 : 2 : 4 baan-resonantie: gerapporteerd door Laplace

iii. Wiskundige (Newtoniaanse) beschrijving:

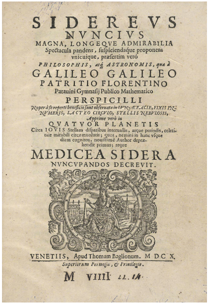
- De Sitter (met Poincaré) $\rightsquigarrow$
  resonante periodieke beweging van Jupiter en de binnenste drie manen
- B, Hanßmann, Zhao (met Kolmogorov, Arnold & Moser) $\rightsquigarrow$
  - multi-periodieke bewegingen van 3 frequenties gegenereerd door De Sitter's periodieke beweging en de vierde maan
  - multi-periodieke librations hiervan met 8 frequenties

iv. Bijzonderheden: Equivariante KAM theorie op een overdekkingsruimte met verschillende tijds-schalen

Galileo Galilei 1564-1642

"Eppur si muove"

heeft ie dat echt gezegd?



SIDEREVS
NVNCIVS
MAGNA, LONGEQVE ADMIRABILIA
Spectacula pandens, suspiciendaque proponens
vnicuique, præsertim verò
PHILOSOPHIS, atq; ASTRONOMIS, quæ à
GALILEO GALILEO
PATRITIO FLORENTINO
Patauini Gymnasij Publico Mathematico
PERSPICILLI
Nuper à se reperti beneficio sunt obseruata in LVNÆ FACIE, FIXIS INNVMERIS, LACTEO CIRCVLO, STELLIS NEBVLOSIS,
Apprime verò in
QVATVOR PLANETIS
Circa IOVIS Stellam disparibus interuallis, atque periodis, celeritate mirabili circumuolutis; quos, nemini in hanc vsque diem cognitos, nouissimè Author depræhendit primus; atque
MEDICEA SIDERA
NVNCVPANDOS DECREVIT.

VENETIIS, Apud Thomam Baglionum. M DC X.
Superiorum Permissu, & Priuilegio.

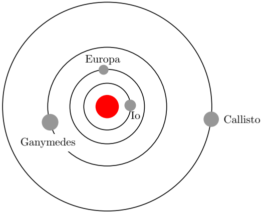
M VIIII 22.14

Sidereus Nuncius 1610

Galileïsche manen I

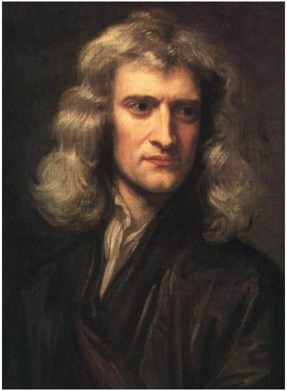
In Eise Eisinga's planetarium 1781

Galileïsche manen II

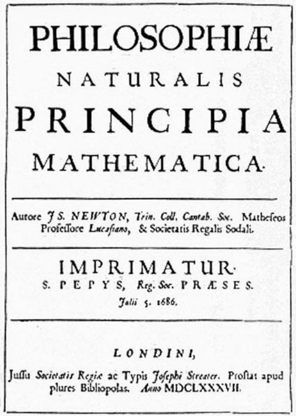


observaties van Jupiter met Io, Europa, Ganymedes and Calysto
(of I, II, III, IV)
een miniatuur zonnestelsel ?

Isaac Newton



Sir Isaac Newton 1642-1727



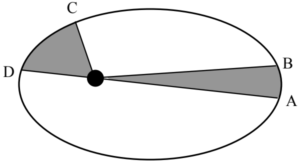
PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Philosophiæ Naturalis Principia Mathematicæ 1687



Kepler III: $T^2 \sim a^3 \quad \Leftrightarrow$
inverse kwadraat aantrekking

John Flamsteed 1646-1719
(eerste) astronomer royal

$\rightsquigarrow$ Newtons hypothese van universele gravitatie

R.S. Westfall. [1981]. *Never at rest.* Cambridge University Press

Marquis de Laplace

Pierre Simon Laplace 1749-1827. 1 : 2 : 4 periode resonantie van Io, Europa en Ganymedes

de Laplace, P.S. [1799] Traité de Mécanique Céleste. *Œuvres complètes*, tome 4, 1-501

Willem de Sitter 1872-1934

- Geboren in Sneek (6 mei 1872)
- Studeerde wiskunde in Groningen
  Trad toen toe tot het Gronings astronomisch laboratorium onder J.C. Kapteyn
  En tot het Cape Observatory onder David Gill (1897-1899)
- Wiskundig / Newtoniaans optreden van de eerste Galileïsche dans bewezen in
  De Sitter, W. [1909]. On the periodic solutions of a particular case of the problem of four bodies. *KNAW proceedings*, **11** 682-698
  De Sitter, W. [1925]. Outlines of a new mathematical theory of Jupiter's satellites. *Annalen van de sterrewacht te Leiden*, **12** 1-55
- Hoogleraar Sterrenkunde aan de Universiteit van Leiden, directeur van het Observatorium 1919-1934
- Fysische kosmologie. Discussies en een artikel met A. Einstein.
  De Sitter Heelal

Guichelaar, J. [2009]. *DE SITTER – Een alternatief voor Einstein's heelalmodel.* Natuurwetenschap & Techniek, onderdeel Van Veen Magazines
Van der Kruit, P.C. [2016]. *De Inrichting van de Hemel: Een biografie van de astronoom Jacobus C. Kapteyn.* Amsterdam University Press

Achtergrond over resonanties

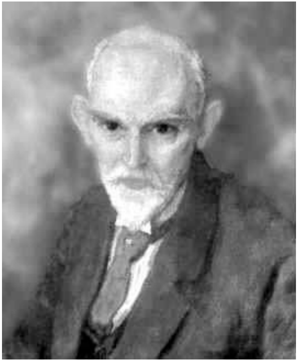
BAAN (periode) RESONANTIES

- 1 : 2 : 4 **tussen Io, Europa en Ganymedes**
- 2 : 5 tussen Jupiter en Saturnus
- 1 : 3 tussen Saturnus en Uranus
- 1 : 2 tussen Uranus and Neptunus
- 3 : 8 tussen Venus en de Aarde en tussen Ganymedes en Calysto

SPIN-BAAN (periode) RESONANTIES

- 1 : 1 van Maan vs Aarde, van Io vs Jupiter en van Charon vs Pluto (wederzijds!)
- 2 : 3 van Mercurius vs de Zon

Willem de Sitter en Jacobus Kapteyn



Willem de Sitter 1872-1934

Jacobus C. Kapteyn 1851-1922

Proefschrift *Discussion of Heliometer Observations of Jupiter's Satellites*
Rijksuniversiteit Groningen 1901

Libraties

One frequency libration Two frequencies libration

Tweede Galileïsche dans

Libraties van 'De Sitter's × Calypso's' multi-periodieke beweging

Hoofdprobleem: Treedt dit op in de wiskundig / Newtoniaanse beschrijving?

Broer, H.W. and Hanßmann, H. [2016]. On Jupiter and his Galilean satellites: Librations of De Sitter's periodic motions. *Indag Math* **27**(5) 1305-1336

Broer, H.W. and ZHAO, L. [2017]. De Sitter's theory of Galilean Satellites. *Celest Mech Dyn Astr* **127**(1) 95-119

Opzet

- Hemel-lichamen worden beschouwd als punt massa's in Newtonian setting
- Veronachtzaming van invloeden van Saturnus, de Zon, &c.
  Alle bewegingen vinden plaats in één vlak (de ecliptica)
  5 lichamen $\rightsquigarrow$ 10 vrijheidsgraden
- Translatie symmetie $\sim$ behoud van impuls (Noether):
  Reductie van deze symmetrie-groep ($= \mathbb{R}^2$) $\rightsquigarrow$ 8 vrijheidsgraden
  (Maw: We bewegen met het zwaartepunt door de ruimte ...)

Schets van de resultaten I

- Massa's van Jupiter, Io, Europa, Ganymedes en Calysto:
  m_0, m_1, m_2, m_3, m_4
  Eccentriciteiten: e_1, e_2, e_3, e_4
- Schalings (kleine) parameter

$$\mu \sim \frac{m_j}{m_0}, j = 1, 2, 3, 4$$

- Schrijf $m_1 = \mu\bar{m}_1,\ m_2 = \mu\bar{m}_2,\ m_3 = \mu\bar{m}_3,\ m_4 = \mu\bar{m}_4$
- $e_1, e_2, e_3, e_4 \leq e$; e kleine konstante
- Multi-parameter $\lambda = (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4, \kappa_1, \kappa_2)$,
  waarin κ_1, κ_2 parameters zijn, gerelateerd aan positie variabelen (acties ...)
  Later: e.g. $\kappa_1 = e_2$ and $\kappa_2 = D_3$

Schets van de resultaten II

- Libratie-beweging is projectie van een multi-periodieke beweging in een invariante 8–dimensional (Lagrangiaanse) torus op de ecliptica
- voor een nergens dichte verzameling van positieve maat in de λ–ruimte, waarbij de maat naar vol nadert voor $\mu \downarrow 0$

Bewijs-gegenereerde situatie: De parameters λ zijn voor het wiskundige gemak gekozen.
Hogere orde Birkhoff normalisatie leidt naar meer aan posities gerelateerde parameters en daarmee persistentie op een open verzameling in de ruimte an massa's.

- Wat is er te zeggen over de werkelijke beweging? Chaotisch?
- Wat is het verleden? Arnold diffusie?
- Berekening van de positie-tabellen (na relativistische correctie)

Lainey, V., L. Duriez and A. Vienne. [2004]. New accurate ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter I. Numerical integration of elaborated equations of motion. *Astron. Astrophys.* **420** 1171-1183.

1. Begin met 4 lichamen-probleem: Jupiter, Io, Europa en Ganymedes $\rightsquigarrow$ 8 vrijheidsgraden
2. Reductie van de translatie-symmetrie ($\sim$ impuls) $\rightsquigarrow$ 6 vrijheidsgraden
3. Voor $\mu = 0$ geen onderlinge interacties tussen Io, Europa en Ganymedes
   $\rightsquigarrow$ 3 onafhankelijke (Keplerse) bewegingen
   $\rightsquigarrow$ bladering van (Lagrangiaanse 6–tori)
   We storen dit door $\mu > 0$ 'voldoend klein' te nemen
4. Meer Noether:
   Reductie van de rotatie-symmetrie ($\sim$ impuls-moment) $\rightsquigarrow$ 5 vrijheidsgraden

In 5 vrijheidsgraden

1. Een 'snelle' hoek wordt uitgemiddeld tot een zekere orde in μ
   Het beginstuk van de reeks is een rotatie-symmetrische benadering
   Afkappen en reduceren van deze symmetrie $\rightsquigarrow$ 4 vrijheidsgraden
2. We bestuderen 'bijna collineaire' evenwichten en hun Hessiaanse 8×8–matrix
3. Terug in 5 vrijheidsgraden
   $\rightsquigarrow$ De Sitter's familie van stabiele (elliptische) periodieke banen

De Sitter, W. [1909]. On the periodic solutions of a particular case of the problem of four bodies. *KNAW proceedings*, **11** 682-698
De Sitter, W. [1925]. Outlines of a new mathematical theory of Jupiter's satellites. *Annalen van de sterrewacht te Leiden*, **12** 1-55

In 7 vrijheidsgraden

Betrek ook de beweging van Calypso: $\rightsquigarrow$ 7 vrijheidsgraden

1. Voor grote λ–maat sterk niet-resonanties tussen periodieke bewegingen van Calypso en De Sitter
   $\rightsquigarrow$ quasi-periodieke (normaal elliptische isotrope) invariante 2–tori
   de 2–tori projecteren vlakbij De Sitter's periodieke banen
2. $\rightsquigarrow$ ge-ëxciteerde quasi-periodieke (Lagrangiaanse) 7–tori
   Gebaseerd op geparametriseerde KAM theorie uit

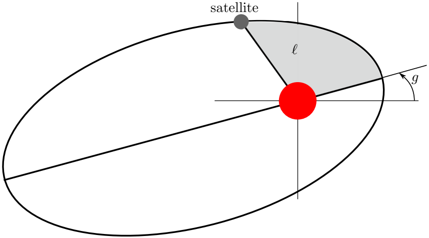
   Broer, H.W., G.B. Huitema and F. Takens [1990]. Unfoldings of quasi-periodic tori. *Mem. AMS* **83**(421), 1-81

   met verschillende tijdschalen volgens

   Han, Y, Y. Li and Y. Yi [2010]. Invariant tori in Hamiltonian systems with high order proper nondegeneracy. *Ann. Inst. H. Poincaré* **10**(8) 1419-1436

De-reductie van de rotatie-symmetrie ($\sim$ impuls-moment)
$\rightsquigarrow$ multi-periodieke (Lagrangiaanse) 8–tori als eerder vermeld

Enige wiskunde: Delaunay variabelen I



Hoeken: gemiddelde anomalie ℓ en argument g van het pericentrum van een Keplerse beweging

$\rightsquigarrow$ canonieke variabelen (L_j, ℓ_j, G_j, g_j), $\quad j = 1, 2, 3$
met L_j, G_j corresponderende impuls-momenten; Hamiltoniaan

$$F_{\mathrm{Kep}} = 4\nu L_1 + 2\nu L_2 + \nu L_3$$

Delaunay variabelen II

Te weten:

$$\begin{cases} L_i = \mu_i \sqrt{M_i}\sqrt{a_i} & \text{circulair impuls-moment} \\ \ell_i & \text{gemiddelde anomalie} \\ G_i = L_i\sqrt{1-e_i^2} & \text{impuls-moment} \\ g_i & \text{argument van het pericentrum} \end{cases}$$

waarin

$$\mu \sim \frac{m_j}{m_0}, j = 1, 2, 3$$

en

$$m_1 = \mu \bar{m}_1, m_2 = \mu \bar{m}_2, m_3 = \mu \bar{m}_3$$

en

$$m_j = \frac{m_0 \bar{m}_j}{m_0 + \mu \bar{m}_j}, \quad M_j = m_0 + \mu \bar{m}_j$$

Mee-bewegend systeem

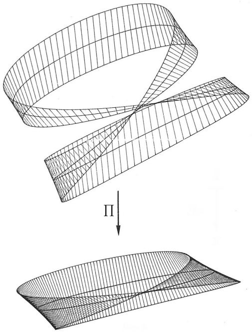
$$
\begin{aligned}
D_1 &= L_1 & \delta_1 &= \ell_1 - 2\ell_2 \\
D_2 &= 2L_1 + L_2 & \delta_2 &= \ell_2 - 2\ell_3 \\
D_3 &= 4L_1 + 2L_2 + L_3 & \delta_3 &= \ell_3 \quad \text{(snelle hoek)} \\
Z_1 &= G_1 & \eta_1 &= g_1 - g_2 \\
Z_2 &= G_1 + G_2 & \eta_2 &= g_2 - g_3 \\
Z_3 &= G_1 + G_2 + G_3 & \eta_3 &= g_3
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow$ canonieke variabelen (D_j, δ_j) and (Z_j, η_j), $\quad j = 1, 2, 3$

$$F_{\mathrm{Kep}} = \nu D_3 \quad \text{genereerd} \quad X_{\mathrm{kep}} = \nu\, \partial_{\delta_3}$$

Z_3 totaal behouden impuls-moment $\sim$ hoek η_3 cyclisch
vastleggen van $Z_3 \neq 0$ reduceert naa 5 vrijheidsgraden 5

À propos: de Möbius band overdekt



Orientatie dubbele overdekking van de Möbius band

$C = (\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}, \quad (x, y) \sim (x - 2\pi, -y), \quad \mathrm{M\ddot{o}} := C/\sim$
$\Pi : (x, y) \in C \mapsto \{(x, y), (x - 2\pi, -y)\} \in \mathrm{M\ddot{o}}$ overdekkings-afbeelding
$\Delta : (x, y) \in C \mapsto (x - 2\pi, -y) \in C$ dek-transformatie
$\Lambda = \{\mathrm{Id}, \Delta\} \cong \mathbb{Z}^2$ dek-groep

Overdekkings-afbeelding $\Pi : \mathbb{T}^6 \times \mathbb{R}^6 \to \mathbb{T}^6 \times \mathbb{R}^6$, $\Pi = (\Pi_1 \times \Pi_2) \times (\Pi_3 \times \Pi_4)$, waar

$$\begin{array}{rcl} \Pi_1 : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/8\pi\mathbb{Z}) & \to & (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \\ (\delta_3, \delta_2, \delta_1) & \mapsto & (\ell_3, \ell_2, \ell_1) := (\delta_3, \delta_2 + 2\delta_3, \delta_1 + 2\delta_2 + 4\delta_3) \\ & & \mathrm{mod}(2\pi\mathbb{Z}) \end{array}$$

die multiple op één is, met dek-transformaties:

$$\Delta_{1,2} : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/8\pi\mathbb{Z}) \to (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/8\pi\mathbb{Z})$$

gedefinieerd door

$$\Delta_1(\delta_3, \delta_2, \delta_1) = (\delta_3, \delta_2 - 2\pi, \delta_1) \quad \text{and} \quad \Delta_2(\delta_3, \delta_2, \delta_1) = (\delta_3, \delta_2, \delta_1 - 2\pi)$$

Overdekking en dek-groep II

In de andere richtingen:

$$\begin{aligned}\Pi_2 : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) &\rightarrow (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \\ (\eta_3, \eta_2, \eta_1) &\mapsto (g_3, g_2, g_1) := (\eta_3, \eta_2 + \eta_3, \eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \\ &\quad\ \mathrm{mod}(2\pi\mathbb{Z})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_3 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (D_1, D_2, D_3) &\mapsto (L_1, L_2, L_3) := (D_1, D_2 - 2D_1, D_3 - 2D_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_4 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (Z_1, Z_2, Z_3) &\mapsto (G_1, G_2, G_3) := (Z_1, Z_2 - Z_1, Z_3 - Z_2)\end{aligned}$$

die allemaal automorf zijn:
In deze richtingen alleen triviale dek-transformaties

De dek-groep gerespecteerd

$$\Lambda = \langle \Delta_1, \Delta_2 \mid \Delta_1^2 = \Delta_2^4 = \mathrm{Id}, \Delta_1 \circ \Delta_2 = \Delta_2 \circ \Delta_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \quad \text{dek-groep}$$

Λ moet worden gerespecteerd wanneer

- we transformeren naar de normaalvorm, gegenereerd door het snelle Keplerse vectorveld

$$X_{\mathrm{kep}} = \nu\, \partial_{\delta_3}$$

$\Leftrightarrow$ middelen over de 1 : 2 : 4-resonantie, *i.c.* de 'snelle hoek' δ_3

om De Sitter's periodieke banen te vinden

- we Kolmogorov–Arnold–Moser transformaties toepassen

om de invariante tori te vinden

♠ Lie algebra methods

Uitgangspunt: reëel analytische Hamiltoniaanse functies

$$F = F_{\mathrm{Kep}} + F_{\mathrm{pert}}, \quad \text{where} \quad F_{\mathrm{pert}} = O(\mu)$$

Normal Form Theorem (Poincaré). *For appropriate domain $\mathcal{N}$ (avoiding collisions), there exists a near-identity, Λ–equivariant, real analytic, symplectic transformation $\Phi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, such that*

$$F \circ \Phi = F_{\mathrm{Kep}} + F_{\mathrm{res}} + F_{\mathrm{rem}}$$

where

$$F_{\mathrm{res}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{\mathrm{pert}} \, d\delta_3$$

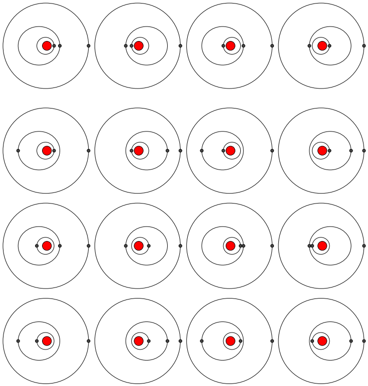
and $F_{\mathrm{rem}} = O(\mu e^2) + O(\mu^2)$.

Note that

- Near identity: $|\Phi - \mathrm{Id}| = O(|\mu|)$ on complex extension of $\mathcal{N}$
- Hamiltonian $F \circ \Phi$ gets form

$$F_{\mathrm{Kep}}(D_1, D_2, D_3) + F_{\mathrm{res}}(D_1, D_2, D_3, \delta_1, \delta_2, Z_1, Z_2, \eta_1, \eta_2; Z_3) + O(\mu e^2) + O(\mu^2)$$

Poincaré's Ansatz



Look near the 16 possible collinearities of Jupiter-Io-Europa-Ganymedes

Strategy II (De Sitter)

- Truncation $F_{\mathrm{Kep}} + F_{\mathrm{res}}$ is invariant under ∂ / ∂_3, *i.e.*, has D_3 as an integral
- Reducing this symmetry $\rightsquigarrow$ Hamiltonian in 4-DOF: $F_{\mathrm{res}}(D_1, D_2, \delta_1, \delta_2, Z_1, Z_2, \eta_1, \eta_2; D_3, Z_3)$
- Equilibria of F_{res} de-reduce to periodic orbits of $F_{\mathrm{Kep}} + F_{\mathrm{res}}$
- Implicit Function Theorem $\rightsquigarrow$ periodic orbits of $F_{\mathrm{Kep}} + F_{\mathrm{res}} + F_{\mathrm{rem}}$

For 4-DOF reduction to F_{res}

- Let

$$\nu_1 = \frac{\partial F_{\mathrm{res}}}{\partial Z_1} \quad \text{and} \quad \nu_2 = \frac{\partial F_{\mathrm{res}}}{\partial Z_2}$$

be (relative) frequencies of $\eta_1 = g_1 - g_2$ and $\eta_2 = g_2 - g_3$

- Equation for equilibria of F_{res} :

$$\nu_1 = \nu_2 = 0$$

$\rightsquigarrow$ 6 possible parametrised solutions

- Only one is elliptic (stable): $\rightsquigarrow$ De Sitter's periodic orbits after 'some' computations on the (normal) linear part in $\mathrm{sp}(2 \times 4, \mathbb{R})$!!!

Strategy III

- Librations of De Sitter's periodic motions in 5 DOF, project down from Lagrangean invariant 5–tori with multi-periodic flow excited by normal linear part
- Taylored Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) Theory: $\rightsquigarrow$ Diophantine quasi-periodic motions under appropriate nondegeneracy of normal linear part in dependence of available parameters
- Different (time) scales in frequencies

General Hamiltonian system / vector field X:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \omega(\lambda) + f(x, y, z, \lambda) \\
\dot{y} &= g(x, y, z, \lambda) \\
\dot{z} &= \Omega(\lambda) z + h(x, y, z, \lambda)
\end{aligned}$$

$x \in \mathbb{T}^n, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^{2p}, \lambda \in \mathbb{R}^s$
symplectic form

$$dx \wedge dy + dz^2 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j + \sum_{j=1}^{p} dz_{2j-1} \wedge dz_{2_j}$$

approximated by integrable system / vector field

$$\tilde{X} = \omega(\lambda) \frac{\partial}{\partial x} + \Omega(\lambda) z \frac{\partial}{\partial z}$$

PROBLEM: Persistence of the isotropic n–torus $y = y_0, \lambda = \lambda_0$
(for simplicity $y_0 = 0$ and $\lambda_0 = 0$)
and of Lagrangean tori excited by normal frequencies / modes

Tool: Frequency mapping

$$\mathcal{F} : \lambda \in \mathbb{R}^s \mapsto \big(\omega(\lambda), \Omega(\lambda)\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{sp}(2p, \mathbb{R})$$

Conditions: Nondegeneracy and Diophanticity

Broer, H.W., G.B. Huitema and F. Takens [1990]. Unfoldings of quasi-periodic tori. *Mem. AMS* **83**(421), 1-81

Sevryuk, M.B. [2007]. Partial preservation of frequencies and Floquet exponents in KAM theory. *Proc. Steklov Inst. Math.* **259** 167-195

Sevryuk, M.B. [2008]. KAM tori: persistence and smoothness. *Nonlinearity* **21**(10) T177-T185

KAM Theory III, Nondegeneracy

- BHT–nondegeneracy: $\mathcal{F}$ is transversal to

$$\{\omega(0)\} \times O\big(\Omega(0)\big) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathrm{sp}(2p, \mathbb{R})$$

  where $O\big(\Omega(0)\big)$ is the orbit of $\Omega(0)$ under adjoint action of $\mathrm{SP}(2p, \mathbb{R})$
- If $\Omega(\lambda)$ in Williamson diagonal form with eigenvalues of type

$$\pm \mathrm{i}\beta, \quad \pm\alpha \pm \mathrm{i}\beta \quad \text{and} \quad \pm\alpha$$

  of respective numbers n_E, n_C and n_R, where $n_E + 2n_C + n_R = p$.
  Put $r = n_E + n_C$
  If $\beta \in \mathbb{R}^r$ is vector of internal and normal frequencies, then
  BHT–nondegeneracy $\Rightarrow$ submersivity of

$$\tilde{F} : \lambda \in \mathbb{R}^s \mapsto (\omega(\lambda), \beta(\lambda)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$$

- One set-up to apply for various values of n and r in the Jovian setting

Dense set of resonances

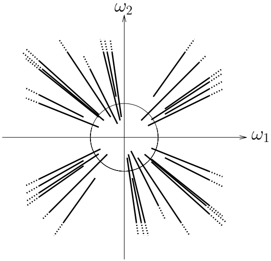
$$\langle k, \omega \rangle + \langle \ell, \beta \rangle = 0$$

$\rightsquigarrow$ small divisors

Overcome by a strong non-resonance condition as follows:
Let $\tau > n - 1$ and $\gamma > 0$.
The pair $(\omega, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ is (τ, γ)–Diophantine
if for all $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ and all $\ell \in \mathbb{Z}^r$ with $|\ell| \leq 2$ one has

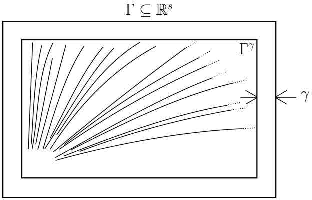
$$|\langle k, \omega \rangle + \langle \ell, \beta \rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \tag{1}$$

$\rightsquigarrow$ closed subset $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)_{\tau,\gamma} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$



Sketch of the set $(\mathbb{R}^2)_{\tau,\gamma}$

Properties of $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)_{\tau,\gamma}$:
Nowhere dense union of closed halflines (intersecting sphere $\mathbb{S}^{n+r-1}$ in Cantor set)
Measure $\mathbb{S}^{n+r-1} \setminus (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)_{\tau,\gamma} = O(\gamma)$ as $\gamma \to 0$
(γ called gap-parameter)



Sketch of $\Gamma^{\gamma}_{\tau,\gamma} \subseteq \Gamma^s \subseteq \Gamma$

Given real analytic $\tilde{X} = \omega(\lambda)\frac{\partial}{\partial x} + \Omega(\lambda)z\frac{\partial}{\partial z}$ and the perturbation X as before, defined on

$$\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2p} \times \Gamma,$$

Assume:

∘ $\tilde{X}$ is BHT nondegenerate
∘ Fix constants $\tau > n + n_E - 1$ and $\gamma > 0$ sufficiently small
∘ $X - \tilde{X} \sim O(\gamma)$ in the compact-open topology

Then there exists a C^∞–diffeomorphism (onto its image)

$$\Phi : \mathbb{T}^n \times U \times V \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2p} \times \Gamma,$$

for neighbourhoods U of $0 \in \mathbb{R}^n$ and V of $0 \in \mathbb{R}^{2p}$

such that ...

∘ The map Φ preserves fibres

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2p} \times \Gamma & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2p} \times \Gamma \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \Gamma \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{T}^n \times \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{T}^n \times \Gamma \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Gamma & \longrightarrow & \Gamma
\end{array}$$

is real analytic in x and affine in the y– and z–direction

Moreover
∘ $\Phi - \mathrm{Id}$ is C^∞–small, preserves the symplectic form $dx \wedge dy + dz^2$

and is equivariant with respect to the group Λ
∘ Restricted to $\mathbb{T}^n \times \{0\} \times \{0\} \times \Gamma^{\gamma}_{\tau,\gamma}$

$$\Phi_*(\tilde{X}) = X$$

∘ The restriction $\Phi_*|_{\mathbb{T}^n \times \{0\} \times \{0\} \times \Gamma^{\gamma}_{\tau,\gamma}}$

preserves the normal linear dynamics of these invariant tori
∘ The n_E elliptic normal frequencies give rise to a smooth Cantor family

of invariant $(n + n_E)$–tori excited from

$$\mathbb{T}^{n+n_E} \times \{0\} \times \{0\} \times \Gamma \subseteq \mathbb{T}^{n+n_E} \times \mathbb{R}^{n+n_E} \times \mathbb{R}^{2(p-n_E)} \times \Gamma$$

under Diophantine conditions slightly adapted from (**??**)

In 4–body problem without Calysto: $n = 1$ and $r = 4$
$\rightsquigarrow$ excited Lagrangean 5–tori with frequencies $\nu, \nu_{n,1}, \nu_{n,2}, , \nu_{n,3}, \nu_{n,4}$:

internal frequency ν of angle $\delta_3 \sim$ order $\varepsilon_1 = 1$
normal frequencies $\nu_{n,1}$ and $\nu_{n,2} \sim$ order $\varepsilon_2 = \sqrt{\mu e}$
normal frequencies $\nu_{n,3}$ and $\nu_{n,4} \sim$ order $\varepsilon_3 = \mu / e$

Averaging over δ_3 to $F_{\mathrm{Kep}} + F^N_{\mathrm{res}} + F^N_{\mathrm{rem}}$ (F^N_{res} independent of δ_3!)
∘ $F^2_{\mathrm{res}} - F_{\mathrm{res}} = O(\mu e^2 + \mu^2)$
∘ $F^N_{\mathrm{rem}} = O(\mu e^N) + O(\mu^N)$
where $e \sim e_1, e_2, e_3$ is extra small parameter

$$0 < \mu \ll e^3 \ll 1 \Rightarrow \varepsilon_1 \gg \varepsilon_2 \gg \varepsilon_3 > 0$$

Smallness conditions

$$|f_1, g_1, h_1| \sim \varepsilon_1\gamma, \quad |f_2, g_2, h_2| \sim \varepsilon_2\gamma, \quad |f_3, g_3, h_3| \sim \varepsilon_3\gamma$$

Choose parameters: $\lambda = (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, e_2, D_3)$ (e_2 and D_3 distinguished)
Take $\gamma = e^N (N > 2 \quad$ sufficiently large$)$ $\rightsquigarrow$ gap measure of $O(\mu e^N)$
here $N = 2$ works

Han, Y, Y. Li and Y. Yi [2010]. Invariant tori in Hamiltonian systems with high order proper nondegeneracy. *Ann. Inst. H. Poincaré* **10**(8) 1419-1436

Adaptation to 5-body system

$n = 2$ and $r = 5$ (full 5–body system with Calysto included)
to find excited Lagrangean 7–tori frequencies: $\nu, \nu_{n,1}, \nu_{n,2}, , \nu_{n,3}, \nu_{n,4}, \nu_{n,5}, \nu_{n,6}$
(latter two $\sim \varepsilon_4 = \mu e^2$)

Choose parameters: $\lambda = (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4, e_2)$ (e_2 distinguished)
Take $\gamma = e^N (N > 2 \quad$ sufficiently large) $\rightsquigarrow$ gap measure of $O(\mu e^N)$

Existence / persistence results:
In the 4–body sytem (5 DOF):

- De Sitter periodic motions $\sim$ 1–tori (De Sitter)
- Excited quasi-periodic Lagrangean quasi-periodic 5–tori
  for large measure in product of phase space and parameter space

In the 5–body system (7 DOF):

- Isotropic quasi-periodic 2–tori (5 bodies, here $n = 2$ and $r = 5$)
  for large measure in product of phase space and parameter space
  (combination of De Sitter periodic motion with motion of Calysto)
- Excited quasi-periodic Lagrangean quasi-periodic 7–tori (5 bodies 7 DOF)
  for large measure in product of phase space and parameter space

Remarks

- De-reduction of the rotational symmetry $\sim$ angular momentum Z_3
  $\Leftrightarrow$ re-introducing angle η_3 adds 1 DOF $\Rightarrow$ adds 1 dimension to all tori
  $\therefore$ In 5–body Jovian system librations are multi-periodic with 8 frequencies
- Use of more distinguished parameters needs order of δ_3–averaging $N > 2$
- 3D description of the 1:2:4 resonance still lacking

THANK YOU